偏極多様体の分類と構造
——Δ種数の理論——

東大教養　藤田隆夫

現在，複素数体上定義された偏極多様体について得られている諸結果（cf. [2]～[7]，[9]）を，定義体の標数が一般の場合に拡張することを試みたところ，どんな状況に立ち至っているかを報告する。概括して述べると，$\mathbb{C}$の場合の結果のうち「総論」に相当する部分，及び「各論」の内の$\Delta=0$に相当する部分はほぼそのまま，又はごく簡単な修正のもとに拡張できるのであるが，次に来るべき$\Delta=1$の偏極多様体の分類については，Picard多様体に対するLefschetz型比較定理の十分精密な形がまだ得られていないため，現在では何とも結論し難い部分がある。他にも，小平型消滅定理に関連して，成否の不明な予想が（$\mathbb{C}$の場合は定理）いくつかある。

§1. 総論

$\mathbb{C}$ の場合の復習を兼ね，標数一般の場合の結果を定式化する。

定義 1.1. 多様体 V とその上の ample 直線束の対 (V, L) を偏極多様体と呼ぶ。以下で (M, L) と書く時は多様体 M は非特異と仮定されているものと了解されたい（記号の簡単のため）。一般には V は既約かつ被約な scheme。

定義 1.2. (V, L) の Hilbert 多項式を

$$\chi(V, tL) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dim H^p(V, tL)$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \chi_j(V, L) \; t^{[j]}/j!$$

の形に展開し，$\chi_j(V, L)$ $(j=0, 1, \cdots, n=\dim V)$ を定義する。ただしここで $t^{[j]} = t(t+1)(t+2)\cdots(t+j-1)$，特に $t^{[0]} = 1$。$\chi_j(V, L)$ がすべて整数値をとることはすぐわかる。以下 $d(V, L) = \chi_n(V, L)$，$g(V, L) = 1 - \chi_{n-1}(V, L)$ とおく。

注意. Riemann-Roch の定理より $d(V, L) = L^n$. また V が非特異なら $2g(V, L) - 2 = (K_V + (n-1)L)L^{n-1}$. ここで K_V は V の canonical bundle. 他方 V が curve の時には $g(V, L) = h^1(V, \mathcal{O}_V)$. つまりこの

$g(V,L)$は曲線論における種数概念の高次元への一つの拡張とみなせる。

定義 1.3. $\Delta(V,L)=n+d(V,L)-\dim H^0(V,L)$ と定義する。これを(V,L)のΔ-種数，又は古典幾何の用語にちなみ total deficiency と呼ぶ。

定義 1.4. (V,L)を偏極多様体，$D\in|L|$とする。このCartier因子Dの，Vの部分schemeとしての自然な構造が既約かつ被約であれば，Dを(V,L)の段(rung)と呼ぶ。Vの部分多様体の列 $V=V_n\supset V_{n-1}\supset V_{n-2}\supset\cdots\supset V_1$ で，V_{n-1}は(V_n,L)の段，V_{n-2}は$(V_{n-1},L_{V_{n-1}})$の段，……，V_1は(V_2,L_{V_2})の段，となっているようなものを，(V,L)のはしご(ladder)と呼ぶ。

はしごが存在すると，(V,L)の構造に関する問題が多くの場合低次元に帰着できる。

定理 1.5. (cf. [6] Prop. 2.2) Dを(V,L)の段とし，その定義式を$\delta\in\Gamma(V,L)$とする。次数多元環 $G(D,L)=\bigoplus_{t=0}^{\infty}\Gamma(D,tL_D)$ の生成元$\eta_1,\cdots\cdots,\eta_k$が$G(V,L)=\bigoplus_{t=0}^{\infty}\Gamma(V,tL)$の元$\xi_1,\cdots,\xi_k$の制限になっていると仮定する。このとき，

$G(V, L)$ は $\delta, \xi_1, \cdots, \xi_k$ によって生成される。

定理 1.6. (cf. [6] Prop. 2.4) 上の定理の状況のもとで，さらに，$g_1(\eta_1, \cdots, \eta_k) = \cdots = g_\ell(\eta) = 0$ が $G(D, L)$ における $\eta_1, \cdots, \eta_k$ の基本関係となっているとする。このとき，ℓ 個の $(k+1)$ 変数多項式 $f_1, \cdots, f_\ell$ で，$f_j(0, Y_1, \cdots, Y_k) = g_j(Y_1, \cdots, Y_k)$ for $\forall j$，なるような，しかも $f_1(\delta, \xi_1, \cdots, \xi_k) = \cdots = f_\ell(\delta, \xi_1, \cdots, \xi_k) = 0$ が $G(V, L)$ における $\delta, \xi_1, \cdots, \xi_k$ の基本関係を与えるようなものが存在する。

これらの定理の証明は $\mathbb{C}$ でも p でも同じ。

注意．上で見たように，$G(V, L) \to G(D, L)$ なる制限写像が全射であれば (V, L) とその段 D の構造とには密接な関連がある。そこでその一次の部分に注目し，$\dim \operatorname{Coker}(\Gamma(V, L) \to \Gamma(D, L))$ を考えると，これは古典で deficiency と呼ばれた量である。一方これは $\Delta(V, L) - \Delta(D, L)$ なる差に等しい。これが total deficiency なる呼称の由来である。なお特に曲面上の曲線の場合については，上の差は $H^1(V, L) = 0$ ならば $h^1(V)$

に等しい。これを irregularity と呼ぶ由来を一般化して，$\Gamma(V,L)\to\Gamma(D,L)$ が全射であるような段を regular と呼ぶことにする。

次にはしごの存在する条件を探す。

定理 1.7.（cf.［4］Th. 1.9）(V,L) を偏極多様体とすると，$\dim Bs|L| < \Delta(V,L)$。ここでは $\dim\emptyset = -1$ と規約しているので，特に，任意の (V,L) に対して $\Delta(V,L)\geqq 0$。

証明はほぼ $\mathbb{C}$ のときのものそのままで良いが，数ケ所修正を要する。修正のしかたは，［10］Th. 3 ~~4~~ の証明を参考として考えればすぐわかる。

定理 1.8.（cf.［6］Cor. 3.6）(V,L) を偏極多様体，$Bs|L|$ は高々有限個，さらにこの $Bs|L|$ 上の各点で V は非特異とする。このとき，$d(V,L)\geqq 2\Delta(V,L)-1$ なる (V,L) ははしごを持つ。

これは［6］に於けるよりもやや精密な形になっているがこの方が次元に関する帰納法がスムースに運ぶ。証明法は $\mathbb{C}$ の場合と同じで，

ただ，定理1.7のとき同様，[11] Ch. IX の Cor. of Th. 15 や，同，Th. 17 を用いて p で通用する論法に直す。[6] §3, Th. 3.1. は，V' の非特異性は以下の論議で不要なことに鑑み，$Bs\,|L|$ の定義イデアルを中心とする V の monoidal 変換を考えることで代用する。

さてここまでくれば後は p も $\mathbb{C}$ も同じで

定理 1.9.（cf. [6] Th. 4.1）(V, L) を偏極多様体，$Bs\,|L|$ は高々有限個で，その各点で V は非特異，さらに $g(V, L) \geqq \Delta(V, L)$ とする。この時

a) $d(V, L) \geqq 2\Delta(V, L) - 1$ なら (V, L) は正則 (regular) なはしごを持つ。

b) $d \geqq 2\Delta$ なら $Bs\,|L| = \emptyset$.

c) $d \geqq 2\Delta + 1$ なら $G(V, L)$ は $\Gamma(V, L)$ で生成され，かつ $g(V, L) = \Delta$。特に L は very ample.

d) $d \geqq 2\Delta + 2$ なら $G(V, L)$ における $\Gamma(V, L)$ の元の間の基本関係式は2次式。 //

注意．定理1.8及び1.9に於て L : ample との仮定を弱めることもできる（[6] 同様）。

7

§2. 各論 その1

一般に $\Delta(V,L)\geqq 0$ であるから，分類理論は $\Delta=0$ のものから始めるのが自然であろう。さて $\Delta=0$ とすると，定理1.7より $Bs|L|=\phi$，そこで定理1.8よりはしご $V=V_n\supset V_{n-1}\supset\cdots\supset V_1$ が存在する。$g(V,L)=g(V_{n-1},L)=\cdots=g(V_1,L)=h^1(V_1)\geqq 0$ だから定理1.9が適用でき，$g=0$ で L は very ample。それから [4] Cor. 1.8 を帰納的に用いて $H^p(V,tL)=0$ for any $p>0$, $t\geqq -n+1$ なる消滅定理を得る。これを $\mathbb{C}$ の場合の小平消滅定理に代用し次の分類定理を得る。

定理 2.1 (cf. [4] §2 & §3) (M,L) を非特異偏極多様体，$\Delta(M,L)=0$ とする。このとき (M,L) は次のうちどれか：

1) $(M,L)\cong(\mathbb{P}^n,H)$
2) $(M,L)\cong(\mathbb{Q}^n,H)$，$\mathbb{Q}^n$ は2次超曲面。
3) $(M,L)\cong(\mathbb{P}^2,2H)$
4) $\mathbb{P}^1$ 上の vector bundle E があって $(M,L)\cong(\mathbb{P}(E),H(E))$，但しここで $H(E)$ は $\mathcal{O}(1)$ に対応する line bundle。

注意．要するに，$\mathbb{C}$のときと同じ結果。

注意2.2．　一般の(V, L)の分類は，$\mathbb{C}$のときと同様，非特異な(M, L)の分類に帰着する（cf. [4] §4）

さて$\mathbb{P}^n, D^n$はΔだけでなくgを使っても特徴づけることができた；例えば「$d(M, L) = 1$，$g(M, L) \leq 0 \implies (M, L) \cong (\mathbb{P}^n, H)$」（cf. [4] Th. 2.1）。これを一般化して次の予想を考える：

予想2.3．　一般の偏極多様体(V, L)に対して，$g(V, L) \geq 0$が成立ち，また，$g = 0$となるのは$\Delta = 0$の場合に限られる。

この予想は$\mathbb{C}$でも未解決である。いくつか部分的結果はあるが，そのほとんどは小平消滅定理に極めて大きく依存しており，pでの成否はわからない。$p > 0$でのほとんど唯一の肯定的結果は

命題2.4．(V, L)は偏極多様体，V：正規，$g(V, L) \leq 0$，さらに(V, L)にはしごが存在すると仮定する。されば$\Delta(V, L) = 0$。

これは[6] Lemma 5.1.の精密化であるが，

消滅定理を安直に適用できる$\mathbb{C}$の場合とちがい，相当こみ入った議論を要する。詳細略。

あと$\mathbb{C}$でのみ証明されている（但し筆者の知る範囲での話）事実を列挙しておく。

① $d(M,L) \leqq 2$, $g(M,L) \leqq 0 \Longrightarrow \Delta(M,L)=0$.

② $K_M+(n+1)L=0 \Longrightarrow (M,L)\cong(\mathbb{P}^n,H)$

③ $K_M+nL=0 \Longrightarrow (M,L)\cong(Q^n,H)$

④ $g(M,L)\leqq 0$, $n=\dim M\leqq 2 \Longrightarrow \Delta(M,L)=0$

⑤ $g(M,L)\leqq 0$, $\Delta(M,L)\leqq 2 \Longrightarrow \Delta(M,L)=0$。

いずれも(M,L)は非特異偏極多様体である。

§3. 各論その2

さて次は$\Delta=1$の場合であるが，非特異なMの場合だけに話を限ることにする。まず最初に定理1.7より$Bs|L|$は高々有限個。そこで定理1.8よりはしごが存在する。よって命題2.4より$g\geqq 1$。故に定理1.9が適用できる。その結論で以後使うものを再録すると

① (M,L)は正則なはしごをもつ.

② $d\geqq 2$なら　$Bs|L|=\emptyset$.

③ $d\geqq 3$なら　$g=1$，かつLはvery ample.

17

さて，$d \geqq 3$ なら [4] Cor. 1.8 を用いて帰納的に $H^p(M, tL) = 0$ for $p>0$, $t \geqq 0$, $n = \dim M \geqq 2$ が示せる。これを小平型消滅定理に代用して，$\mathbb{C}$ の場合と同様に次を得る。

命題 3.4. $\Delta(M, L) = 1$, $d(M, L) \geqq 3$ ならば，$K_M + (n-1)L = 0$ (linearly eq.).

予想 3.5. $\Delta(M, L) = g(M, L) = 1 \Longleftrightarrow K_M + (n-1)L = 0$。

この主張は，$\mathbb{C}$ に於ては成立つ (cf. [7] Th. 1.9 又は [9] 定理 3.18)。$p>0$ では $\Leftarrow$ が特に難しい。

さて $\mathbb{C}$ の場合の結果を思い出す。

定理 3.6. (M, L) を $\mathbb{C}$ 上の n 次元非特異偏極多様体とする。このとき $d = d(M, L)$ の値に応じ (M, L) は次の構造をもつ。($n \geqq 2$ とする)

① $d = 1$: $g = g(M, L) = 1, 2$ の場合を除きよくわからない。詳細は略。

② $d = 2$: $|L|$ の定める有理写像により M は $\mathbb{P}^n$ の二重分岐被覆となり，その branch locus は $\mathbb{P}^n$ の非特異超平面。次数は g で計算できる。hyperelliptic curve の高次元版。

③ $d = 3$: 非特異 3 次超曲面。

11

④ $d=4$：(2, 2)型完全交叉多様体.

⑤ $d=5$：Plücker座標により埋めこまれたグラスマン多様体 $Gr(5,2)$（5次元ベクトル空間の2次元部分空間の全体，従って多様体としては6次元で，$\mathbb{P}^9$ に埋込まれている），又はXの linear section（$\mathbb{P}^9$ の線型部分空間との transversal な共通部分），又はある種の4次元多様体（4次元の2次超曲面をある定まった仕方で2度 blow up し，さらに2度 blow down して構成するのだが，詳細は略す）。$n\geqq 7$ とはなり得ない。

⑥ $d=6$：$\mathbb{P}^2$ の，非共線三点の blow up，又は $M\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$，又は $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$（$T_{\mathbb{P}^2}$ は $\mathbb{P}^2$ の tangent bundle），又は $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$。特に $n\leq 4$.

⑦ $d=7$：$\mathbb{P}^2$ の2点 blow up，又は $\mathbb{P}^3$ の1点 blow up。（注：後者の場合 $L=2H-E_p$）。

⑧ $d=8$：$\mathbb{P}^2$ の1点 blow up，又は $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$，又は $\mathbb{P}^3$（このとき $L=2H$）。特に $n\leqq 3$.

⑨ $d=9$：$(\mathbb{P}^2, 3H)$。

⑩ $d\geqq 10$：$n\geqq 2$ では存在しない。

なお，$K_M+(n-1)L=0$ でLは一意に決まるので，上ではMの構造についてのみ述べた。

さてこれの正標数の場合への拡張を試みよう。まず③，④はLが very ample であることなどより容易に証明できる。また，$p \neq 2$ ならば，②を拡張することもむつかしくない。

$d \geqq 5$ の場合は，一般に d が小さくなるほど問題はむつかしくなる。まず $n=2$ の場合から始める。命題3.4より $K_M=-L$，また $h^1(M)=0$ もあるから，Mは rational。そこで分類理論を思い出せば，Ⓒと同様の結果を得る。従って特に⑩も成立つ。

ここから3次元の結果に移る際に困難がある。最もやさしい⑨を例にとって説明する。さてⒸでこのギャップを乗り越えることができたのは次の事実に基く。

命題3.7.　Mは3次元非特異複素多様体，Dはその上の非特異な ample divisor とする。このとき $\mathrm{Coker}(\mathrm{Pic}(M) \longrightarrow \mathrm{Pic}(D))$ は torsion free である。

これは $H_2(D;\mathbb{Z})\longrightarrow H_2(M;\mathbb{Z})$ が全射であることから容易に導かれる。

さてこれを用いて 9 は次のようにして証明される。3次元以上で $\Delta=1$, $d=9$ となる (M,L) の存在しないことを言えばよい。さてそのような (M,L) が存在したとする。$|L|$ は very ample だから，その一般のメンバー D は非特異，そして $d(D,L)=d(M,L)$ ，$1=g(M,L)=g(D,L)$ 。また，$\Delta(D,L)\leqq\Delta(M,L)$ だが，$\Delta(M,L)=1$ だから，$\Delta(D,L)\neq 1$ とすると $\Delta(D,L)=0$，従って $g(D,L)=0$ で矛盾。よって $\Delta(D,L)=1$。そこで，この手続きをくり返すことにより，$\dim M=3$ の場合を考えれば十分なことがわかる。さてこのときは $\dim D=2$ だから，2次元での分類理論より $(D,L)\cong(\mathbb{P}^2,3H)$。ここで命題 3.7 により $\exists F\in \mathrm{Pic}(M)$, s.t. $F_D=H$ がわかる。すると，$\mathrm{Pic}(M)\longrightarrow\mathrm{Pic}(D)$ は単射だから，$L=3F$ が $\mathrm{Pic}(M)$ で成立つ。よって $9=d(M,L)=L^3=(3F)^3=27F^3$，これは F^3 が整数であることに矛盾。

14

注意。上の論法を用いて次の主張が示せる「Dが多様体M上のample因子で$D \cong \mathbb{P}^{n-1}$, $n \geqq 3$ なら $M \cong \mathbb{P}^n$, $[D] = H$」。実際，$L = [D] \in \mathrm{Pic}(M)$ とおき，$L_D = kH'$，但しH'は$\mathbb{P}^{n-1}$のhyperplaneの定める直線束，とおけば，$k=1$が先の論法で出る。よって(M, L)ははしごを持ち，$g(M, L) = g(D, H') = 0$。命題2.4より$\Delta(M, L) = 0$。一方$d(M, L) = d(D, H') = 1$だから分類定理2.1より$(M, L) \cong (\mathbb{P}^n, H)$。Q.E.D.。ところで，これを見ればわかるように，$\mathbb{C}$の特殊性はただLefschetz型の定理のみに関係している。さて他方，シンポジウムの際に丹後先生に教えていただいたところによれば，上の主張は，標数$= n = 3$という成否不明の場合を除き，一般標数で成立つそうである。ただし証明法は全然異なる由。こうした事実は多分「予想：DをM上の豊富因子とするとき，制限写像 $\mathrm{Pic}(M) \to \mathrm{Pic}(D)$ は $\dim M \geqq 4$ なら同型，$\dim M = 3$ なら単射でしかもそのCokerはl torsionを持たない。」　(pと素)

を暗示しているのであろう。証明のアイデアなどない無責任な想像であるからどうせついで，もっと一般化しておこう；

「想像：D を M 上の豊富因子，$CH^i(\ )$ を余次元 i の代数的サイクルの有理同値類のなす群とする。このとき $CH^i(M) \longrightarrow CH^i(D)$ は，$2i \leq \dim M - 2$ なら同型，$2i = \dim M - 1$ ならば単射かつ余核は ℓ-torsion free」

とは書いてみたが p-torsion が本当にあるのかどうかわからない。また，仮定の方も D を単に "ample" としたのではだめで，小平型消滅定理でそうだったように，何らかの意味で "十分 ample" としなければならないかもしれない。$\Delta=1$ の偏極多様体の分類に役立てようという筆者の下心から言うと，せめて "very ample" くらいで成立ってほしいところであるが……。

再び $\Delta=1$ の偏極多様体の分類定理3.6にもどる。⑤，⑥，⑦，⑧の諸結果の拡張に関しても，第一の障害は2次元から3次元へのギャ

16

ップであり，$\mathrm{Pic}(M) \to \mathrm{Pic}(D)$ の有様が問題となる。ここで D は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 又は $\mathbb{P}^2$ の何点かの blow up（点の個数 $= 9 - d$）であり，$\mathrm{Pic}(D)$ の構造は交叉型式をこめてすっかりわかっていることに注意しよう。さて，$\mathrm{Pic}(D)$ の自己同型の内で，交叉型式を保ち，かつ $c_1(D)$ を動かさないようなもののなす群を $W(D)$ としよう。$\mathbb{C}$ での分類理論ができたのは次が成立したからである（cf. [7], §4）：

命題 3.8. 上の状況のもとで，$W(D)$ のある部分群 G が定まり，$\mathrm{Pic}(M) \to \mathrm{Pic}(D)$ の像はこの G による不動点の全体と一致する。

この G というのは実は $|L|$ のメンバー達のなす代数族から定まるモノドロミー群であり，上の命題は [1] Th. 4-1-1 の簡単な応用として得られる。

さてこの命題を用いて⑧は次のように証明される。$|L|$ の一般のメンバー D をとれば，$D \cong \mathbb{P}^1_\alpha \times \mathbb{P}^1_\beta$ 又は $\mathbb{P}^2_\gamma$ の一点 blow up. 前者の場合 $L_D = c_1(D) = 2H_\alpha + 2H_\beta$. そこで命題 3.7 より

17

$F = H_\alpha + H_\beta$ も $\mathrm{Pic}(M)$ からくる。そして $L = 2F$ は $\mathrm{Pic}(M)$ でも成立つ。よって F は ample, また $K_M = -2L = -4F$. 故に $(M, F) \cong (\mathbb{P}^3, H)$。

後者の場合は矛盾が出る。実際, $D \cong Q_q(\mathbb{P}_r^2)$ の例外曲線 E_q を考えると, これは $W(D)$ で動かない。よって命題 3.8 より直線束としては $F \in \mathrm{Pic}(M)$ の制限になっているとしてよい。詳細は略すが消滅定理をうまく使って $|F| \neq \emptyset$ が言える。そこで $E \in |F|$ をとる。$E \cap D = E_q$ であり, E_q は偏極多様体 (E, L_E) の段である。E は正規だから, 命題 2.4 が適用できて $(E, L) \cong (\mathbb{P}^2, H)$。$FL\{E\} = F\{E_q\} = -1$ だから $[E]_E = -H$, これより因子 E は非特異点に blow down できる。そこで $M = Q_p(M^b)$, $E = Q_p(p)$ とする。$L^b = L + E$ が $\mathrm{Pic}(M^b)$ から来ることは容易にわかる。また中井判別法 [12] により L^b は M^b 上では ample。$K_{M^b} = -2L^b$ なので $\Delta(M^b, L^b) = 1$ (cf. 予想 3.5)。一方 $d(M^b, L^b) = 9$。これは⑨に矛盾する。

こうして $d = 8$, 3 次元なる $(\mathbb{P}^3, 2H)$ になる

わけであるが，丹後先生の結果（又は④でのLefschetz定理）を用いれば4次元以上で $d=8$ とはなり得ないことがすぐわかる。

⑥ ⑦でも状況は似たようなものである。命題3.8が成立てば，①での論法を $p>0$ に移し変えることはそう困難ではない（はず）。しかし⑤に関してはなかなかそうもいかず，3次元に上がってからの先にもなお障害がある（主に消滅定理が関係する：Bertini型定理も難題）模様であるが，あまりに技術的なことになるし筆者にもよくわからないのでここでは一切省略する。

というわけで，命題3.7及びその精密化たる命題3.8の正標数版を見出すことが $p>0$ での偏極多様体の分類理論における現下の最大課題となっているわけである。何か御存じの方は御一報下されば大層有難いところなのですが。

11

文献

[1] Deligne ; Théorie de Hodge, Publ. Math. IHES 40 (1972)

[2] Fujita ; On the structure of certain types of polarized varieties I & II, Proc. Japan Acad. 49 (1973) & 50 (1974)

[3] 〃 ; 偏極多様体のΔ種数について (東大修士論文 '74)

[4] 〃 ; On the structure of pol. var. with Δ=0, J. of Fac. Sci Univ. of Tokyo, 22 (1975)

[5] 〃 ; 偏極多様体の構造と分類, 数学 (1975) 秋季号

[6] 〃 ; Defining Equations for certain types of pol. var. Complex Analysis & Algebraic Geometry, 1977. Iwanami

[7] 〃 ; On the str. of pol. manif. of Δ=1 (preprint)

[8] 〃 ; On Lefschetz principle (in preparation)

[9] Iitaka ; 可換環論, 岩波

[10] Matsusaka & Mumford ; Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties, Amer. J. Math. 86 (1964) 668-684

[11] Weil ; Foundations of algebraic geometry, revised ed. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. No. 29 (1960)

[12] Nakai ; A criterion of an ample sheaf on a projective scheme, Amer. J. Math. 85 (1963) 14-26